

MATEMATICA PER L'INDUSTRIA

(II) FILTRAZIONE DI FLUIDI IN MEZZI POROSI

(1) Porosità

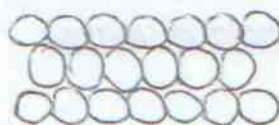
Si dice che un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è occupato da un mezzo poroso quando esiste una funzione $\varepsilon: \Omega \rightarrow (0,1)$ tale che la massa $m(D)$ di un liquido (di data densità ρ_0) che può essere contenuto in un arbitrario sottoinsieme $D \subset \Omega$ non è superiore al valore (di saturazione)

$$W(D) = \int_D \rho_0 \varepsilon(x) dx \quad (1.1)$$

(più in generale si potranno avere casi in cui $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$)

Essenzialmente questo significa che $1 - \varepsilon$ è il rapporto tra il volume dei "grani" del mezzo poroso e il volume totale. Cioè ε è il rapporto tra il volume dei "pori" e il volume totale.

ESERCIZIO: Calcolare la porosità ε di un mezzo costituito da sfere di raggio R , nelle varie possibili configurazioni omogenee. Partire ad esempio da un caso in \mathbb{R}^2 e considerare separatamente le due situazioni



Passare poi al caso \mathbb{R}^3 . Dimostrare che ε non dipende da R .

(2) Conducibilità idraulica

Consideriamo il moto unidimensionale di un liquido in un mezzo poroso completamente saturato e omogeneo.

Supponiamo che il moto sia stazionario e che il mezzo poroso riempia un filtro cilindrico di sezione Σ e di lunghezza L ai cui due estremi vengono applicate le pressioni P_1 e P_2 .

La legge sperimentale di Darcy afferma che il volume di liquido che attraversa il filtro nell'intervallo (t_1, t_2) è dato da

$$Q = c \Sigma (t_2 - t_1) (P_2 - P_1) / L \quad (1.2)$$

La costante positiva c si chiama conducibilità idraulica e dipende dal mezzo poroso e dal liquido.

Se si vuole scorporare l'influenza del liquido si dà a c l'espressione

$$c = k / \mu \quad (1.3)$$

dove μ è la viscosità del liquido e k prende il nome di permeabilità.

La (1.2) è stata dedotta sperimentalmente per il caso unidimensionale e stazionario. In generale si definisce il vettore flusso specifico di liquido il vettore $\underline{q}(\underline{x}, t)$ tale che, per ogni superficie δ dotata (quasi ovunque) di normale \underline{n} il volume di liquido che attraversa la superficie δ nell'intervallo (t_1, t_2) è

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\delta} \underline{q} \cdot \underline{n} \, d\delta \quad (1.4)$$

e Q è positiva se il liquido attraversa δ nel senso positivo della normale \underline{n} .

A questo punto, la legge di Darcy si scrive

$$\underline{q} = -c \text{ grad } p \quad (1.5)$$

(attenzione: \underline{q} è un flusso di volume)

(3) Equazione di bilancio di massa

Ritorniamo al caso unidimensionale e facciamo un bilancio di massa in una porzione (x_1, x_2) del nostro filtro tra gli istanti t_1, t_2 . Scriviamo che la massa di liquido contenuto all'istante t_i ($i=1,2$) è

$$m_i = \Sigma \int_{x_1}^{x_2} \epsilon \rho(x, t_i) dx$$

Il bilancio di massa in quella data porzione di filtro si esprimerà dicendo che $m_2 - m_1$ è uguale alla quantità che è entrata meno quella che è uscita, nell'intervallo (t_1, t_2) dai due piani $x=x_1$ e $x=x_2$.

Si avrà perciò $\forall x_1, x_2, t_1, t_2$

$$\Sigma \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} [\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)] dx = \Sigma K \int_{t_1}^{t_2} [\rho(x_2, t) p_x(x_2, t) - \rho(x_1, t) p_x(x_1, t)] dt$$

Dividendo per $(x_2 - x_1) (t_2 - t_1)$ e facendo tendere $x_2 \rightarrow x_1^+$, $t_2 \rightarrow t_1^+$ si ottiene

$$\varepsilon \rho_t = c(\rho p_x)_x \quad (1.6)$$

dove le funzioni che appaiono nella (1.6) sono valutate in x_1, t_1 che peraltro è generico.

ESERCIZIO: Come cambia la (1.6) se si suppone che anche ε, c (ed eventualmente Σ) dipendono da x e/o da t ?

Se, invece di considerare la situazione unidimensionale, avessimo fatto un ragionamento più generale avremmo ragionato così.

Si prendeva un generico sottoinsieme V dal dominio Ω occupato dal mezzo poroso e si scriveva il bilancio di massa in V

$$\varepsilon \int_V [\rho(\underline{x}, t_2) - \rho(\underline{x}, t_1)] d\underline{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\sigma} [\rho(\underline{x}, t) \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_i(\underline{x})] d\sigma \quad (1.7)$$

dove \underline{n}_i è la normale alla frontiera di V diretta verso l'interno.

Il teorema di Green ci dice per un generico vettore \underline{u}

$$\int_{\sigma} \underline{u} \cdot \underline{n}_i d\sigma = - \int_V \text{div } \underline{u} d\underline{x} \quad (1.8)$$

(Il segno - perché c'è la normale interna).

Quindi otteniamo:

$$\int_V [\varepsilon \rho_t - c \text{div}(\rho \text{grad } p)] dV = 0 \quad (1.9)$$

dove, oltre alla (1.7) e (1.8) abbiamo usato la (1.5)

(oltre a dividere per $t_2 - t_1$ e fare $t_2 \rightarrow t_1^+$).

Dato che, nella (1.9), il sottoinsieme V è qualunque, l'equazione di bilancio si scrive:

$$\varepsilon \rho_t - c \text{div}(\rho \text{grad } p) = 0 \quad (1.10)$$

Il ragionamento ripercorre quello che ci ha portato alla (1.8) del Cap. I. Qui la quantità che si conserva è

La massa, quindi $e = \varepsilon g$; il
 flusso di massa è il flusso di volume moltiplicato
 per la densità ρ .

(4) Casi particolari

(a) Il liquido è *incompressibile*, cioè $\rho = \rho_0$ costante.

In questo caso, per il moto unidimensionale la (1.6) ci dice che

$$p_{xx} = 0 \quad (1.11)$$

Questo significa che lungo tutto il filtro il gradiente di pressione (cioè p_x) è costante e così pure il volume (come pure la massa) di liquido che passa attraverso il filtro per unità di tempo, cioè la *portata* del filtro che dipende esclusivamente (oltre che dalle caratteristiche del filtro: sezione, lunghezza, conducibilità idraulica) dalla differenza di pressione agli estremi (cfr. (1.2)).

Nel caso di moto in \mathbb{R}^3 , la (1.10) fornisce $c \rho_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} p = 0$ e quindi

$$\Delta p = 0 \quad (1.12)$$

Con $\Delta (\equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$ operatore laplaciano.

La (1.12) è la classica equazione di Laplace che si incontra in numerosi campi della fisica matematica (teoria del potenziale, elasticità, elettrostatica...).

(b) Il liquido è *scarsamente compressibile* e la relazione tra la densità e la pressione è:

$$\rho = \rho_0 \exp[\beta(p - p_0)] \quad (1.12)$$

$$(\beta(p - p_0) \ll 1).$$

Allora dato che:

$$\rho_x = \beta \rho p_x$$

la (1.6) si legge

$$\varepsilon \rho_x = (c/\beta) \rho_{xx} \quad (1.13)$$

e nel caso pluridimensionale:

$$\varepsilon \rho = (c/\beta) \Delta p \quad (1.14)$$

La (1.13) è un'altra classica equazione alle derivate parziali del secondo ordine (lineare a coefficienti costanti) e si chiama *equazione del calore o della diffusione*. La (1.14) è la sua forma pluridimensionale. Abbiamo già in contrabblo entrambe al Cap. I.

(c) Altre equazioni di stato $p = p(\rho)$

Se il fluido che satura tutto il mezzo poroso è un gas, la relazione tra pressione e densità è spesso assunta dalla forma

$$p = \gamma \rho^\alpha \quad \alpha \geq 1, \quad \gamma > 0, \quad (1.15)$$

(il caso $\alpha=1$ corrisponde al caso isoterma per un gas perfetto). Se ne deduce:

$$\rho_t = (c/\epsilon) \gamma \alpha (\rho^{\alpha-1} \rho_x)_x \quad (1.16)$$

oppure equivalentemente

$$p_t = c \alpha / \epsilon (p p_{xx} + 1/d p_x^2) \quad (1.17)$$

La (1.16) e la (1.17) sono ancora equazioni paraboliche (per p e p positive) ma lo sono non uniformemente. Di esse non ci occuperemo.

(d) Caso di mezzo poroso non saturato.

Torniamo al caso di un liquido incompressibile di densità ρ_0 ma supponiamo che esso possa non occupare tutto lo spazio dei pori del mezzo poroso. Definiamo *saturazione* $\theta \in [0,1]$ la frazione del volume dei pori effettivamente occupata dal liquido.

Cioè se $\theta = \theta(x,t)$, la massa di liquido che al tempo t è contenuta nella porzione di filtro (di sezione Σ) compresa tra i piani $x=x_1$ e $x=x_2$ sarà data da:

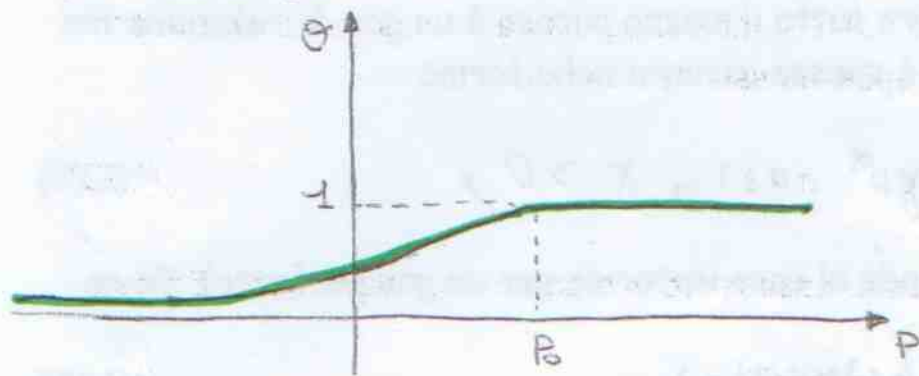
$$m = \Sigma \int_{x_1}^{x_2} \epsilon \rho_0 \theta(x,t) dx$$

Ripercorrendo il ragionamento che ci ha portati alla (1.6) perveniamo alla seguente espressione:

$$\epsilon \rho_0 \theta_t = c \rho_0 p_{xx} \quad (1.18)$$

Anche in questo caso abbiamo bisogno di un'ulteriore relazione che lega tra loro la pressione e la saturazione.

Questa è una legge sperimentale che dipende dalla natura del mezzo poroso e da quella del liquido. Generalmente si ha un andamento come quello della figura



Ovviamente $\theta=1$ corrisponde al mezzo saturo e questo valore si ottiene per pressioni superiori alla pressione atmosferica p_0 . Il valore $\theta=0$ (mezzo completamente secco) si ha per pressioni molto inferiori a p_0 ; dal punto di vista matematico $\theta(p)$ è una funzione derivabile strettamente crescente in $(-\infty, p_0)$ e identicamente uguale ad 1 per $p \geq p_0$ e tendenti a 0 per $p \rightarrow -\infty$.

(5) Il caso Green-Ampt.

Consideriamo un caso limite: oia $\theta=1$ per $p \geq p_0$ e $\theta=0$ per $p < p_0$, cioè il mezzo poroso è completamente asciutto (per $p < p_0$) o totalmente saturo ($p \geq p_0$); si dice che tale mezzo ha capillarità trascurabile. È una buona approssimazione per mezzi porosi con grani grossolani e irregolari; si può perdere in generalità poriamo porre $p_0 = 0$.

Consideriamo un moto unidimensionale in un tubo alle cui estremità $x=0$ e $x=L$ si impongono le pressioni $P > 0$ e 0 e si suppone che

(i) il mezzo pieno che occupa il tubo sia inizialmente asciutto

(ii) dalla estremità $x=0$ si immette un liquido incompressibile a pressione P .

Ad ogni istante t in un certo intervallo $(0, T)$ esisterà un piano di equazione $x=s(t)$ che separerà le zone sature ($x \in (0, s(t))$) da quella insatura.

D'altra parte la (1.18) ci dice che nelle zone sature è

$$(1.19) \quad P_{xx} = 0, \quad 0 < x < s(t)$$

e imponendo le condizioni

$$(1.20) \quad p(0, t) = P, \quad p(s(t), t) = 0$$

si ha subito

$$(1.21) \quad p(x, t) = P \frac{s(t) - x}{s(t)}, \quad x \in (0, s(t)), t > 0.$$

Ora consideriamo la posizione del fronte di saturazione in due istanti t_1 e t_2 . È chiaro che il liquido che ha attraversato il piano $x = s(t_1)$ nell'intervallo (t_1, t_2) è quello che è servito a riempire tutti i pori della porzione compresa tra $s(t_1)$ e $s(t_2)$. Cioè

$$(1.22) \quad - \int_{t_1}^{t_2} c \rho_0 P_x(s(t), t) dt = \varepsilon \rho_0 [s(t_2) - s(t_1)].$$

E quindi

$$(1.23) \quad \varepsilon \frac{ds}{dt} = -c P_x(s(t), t), \quad t \in (0, T).$$

Dalla (1.21) P_x

$$(1.24) \quad P_x = - \frac{P}{s(t)}$$

e quindi

$$s \dot{s} = \frac{c P}{\varepsilon}$$

$$s^2(t) = 2 \frac{c P}{\varepsilon} t, \quad t \in (0, T).$$

Ovviamente T è il tempo tale che s raggiunge l'altra estremità del tubo $x = L$.

(II) SOSPENSIONI E SOLUZIONI

(1) Concentrazione

Consideriamo un sistema costituito da due sostanze diverse che occupa un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

- (i) per ogni sottoinsieme V di Ω la massa di una delle due sostanze (d'ora in poi denominata "soluto") contenuta in V è trascurabile rispetto alla massa dell'altra (d'ora in poi denominata "solvente").
- (ii) Esiste una funzione limitata $c(\underline{x})$ tale che la massa di soluto contenuta in ogni $V \subset \Omega$ è

$$m_v = \int_V c(\underline{x}) \, d\underline{x} \quad (2.1)$$

Tempo N.B. Si potranno dare casi in cui c è funzione della posizione e del ~~posto~~ tempo; l'ipotesi (ii) dovrà essere valida ad ogni istante t e si scriverà:

$$m_v(t) = \int_V c(\underline{x}, t) \, d\underline{x} \quad (2.2)$$

Osserviamo anche che (in base ad un teorema di teoria della misura, teorema di Radon-Nikodym) la (2.1), cioè l'esistenza di una funzione limitata $c(\underline{x})$ è una conseguenza di una ipotesi più naturale - e meno matematica - di (ii) cioè dell'ipotesi che $m_v \rightarrow 0$ quando la misura di $V \rightarrow 0$. (analogo discorso per il caso della (2.2)).

Un sistema che soddisfa ad (i) e (ii) si chiama *sospensione* o *soluzione*; la quantità c si dice *concentrazione* della sospensione (soluzione).

Più precisamente, data l'ipotesi (i), si parla di *sospensioni* (soluzioni) *diluite*.

Si noti che talvolta si dà come definizione di concentrazione il rapporto tra la massa di soluto e la massa di solvente contenuta in un V quando il suo volume tende a zero. In tal caso però la concentrazione sarebbe un numero γ (che può esprimersi anche in percentuale; in tal caso si parla spesso di titolo della soluzione).

Ovviamente se ρ rappresenta la densità del solvente (dimensioni di ρ : massa/volume), si ha $c = \gamma\rho$

(2) Conservazione della massa (caso unidimensionale e mezzo in quiete)

Consideriamo il caso in cui la concentrazione del soluto possa dipendere dalla posizione solo tramite una coordinata x . Supponiamo che la soluzione sia in quiete ma che il soluto possa essere in movimento (cioè che la sua concentrazione possa dipendere dal tempo oltre che dalla x). Si noti che l'ipotesi (i) del paragrafo precedente ci consente di supporre che il solvente sia in quiete; se non ci fosse l'ipotesi (i) al moto del soluto corrisponderebbe un moto del solvente che va a "rimpiazzare" il soluto che si muove, perché il sistema sia complessivamente in quiete.

Consideriamo due piani $x=x_1$ e $x=x_2$.

La massa di soluto contenuto, all'istante t_i ($i=1,2$), in un cilindro retto di base Σ e delimitato dai piani $x=x_1$ e $x=x_2$ è chiaramente

$$m(t_i) = \Sigma \int_{x_1}^{x_2} c(x, t_i) dx \quad (2.3)$$

Quindi, con un ragionamento simile a quello del paragrafo 3 del precedente capitolo, potremo scrivere il bilancio di massa nel cilindro se esprimiamo la massa che attraversa la sezione Σ del piano $x=x_i$ ($i=1,2$) nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) .

Questa informazione è fornita dalla legge di Fick che asserisce che tale quantità è espressa dall'integrale

$$-\Sigma \int_{t_1}^{t_2} D c_x(x_i, t) dt$$

in cui D è una costante positiva detta DIFFUSIVITA' e la quantità è positiva quando la massa attraversa il piano $x=x_i$ da sinistra verso destra, cioè nel verso delle x positive.

Avremo perciò:

$$\Sigma \int_{x_1}^{x_2} [c(x, t_2) - c(x, t_1)] dx = -\Sigma \int_{t_1}^{t_2} D [c_x(x_1, t) - c_x(x_2, t)] dt \quad (2.4)$$

Con il solito procedimento di limite si ha infine

$$c_t = D c_{xx} \quad (2.5)$$

che è detta **equazione di diffusione**.

Ancora una volta, per giungere alla (2.5) abbiamo utilizzato un'ipotesi costitutiva (la (ii)) e una legge sperimentale (la legge di Fick).

(3) Conservazione della massa (mezzo in quiete)

Se eliminiamo l'ipotesi unidimensionale, prendiamo un $V \subset \Omega$ arbitrario e chiamiamo

$$m_i = \int_V c(\underline{x}, t_i) d\underline{x}$$

la massa di soluto contenuta in V all'istante t_i ($i=1,2$).

Ora indichiamo con $\underline{q}(\underline{x}, t)$ il vettore tale che, presa una qualunque superficie δ regolare cioè dotata (quasi ovunque) di normale \underline{n} , la massa che attraversa δ nel verso di \underline{n} nell'intervallo di tempo generico (t_1, t_2) è dato da

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\delta} \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} d\delta dt$$

In questo caso generale la legge di Fick si scrive

$$\underline{q} = -D \text{grad } c \quad (2.6)$$

Allora il bilancio di massa nel generico V si scriverà:

$$\int_V [c(\underline{x}, t_2) - c(\underline{x}, t_1)] d\underline{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} D \text{grad } c \cdot \underline{n}_i d\delta dt$$

Dove \underline{n}_i è la normale alla frontiera di V rivolta verso l'interno. Applicando il teorema di Green (per avere la normale esterna cambieremo di segno all'integrale) e dividendo per $t_2 - t_1$ e facendolo tendere a zero avremo

$$\int_V [c_t - \text{div}(D \text{grad } c)] d\underline{x} = 0 \quad (2.7)$$

e dovendo la (2.7) valere per ogni arbitrario V potremo scrivere

$$c_t = \text{div}(D \text{ grad } c) \quad (2.8)$$

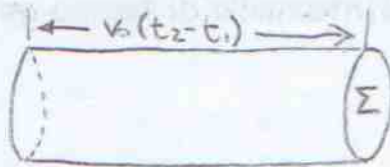
che, per D costante, diventa: $c_t = \Delta c$ (2.9)

dove $\Delta = \text{div grad}$ è il laplaciano che, in coordinate cartesiane è

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2.$$

(4) Caso della soluzione (cioè del solvente) in moto con velocità nota v_0 : caso unidimensionale

In questo caso, rispetto al caso del paragrafo 2, c'è un meccanismo in più che contribuisce al bilancio di massa. Per valutare la massa di soluto che attraversa la sezione Σ del piano $x=x_i$ nell'intervallo (t_1, t_2) dovremo sommare al contributo $-Dc_x$ della legge di Fick quello dovuto al fatto che attraverso quella sezione passa un volume di solvente pari a $v_0 \Sigma (t_2 - t_1)$.



$x = x_i$

Questo farà sì che, per effetto del moto del solvente, la sezione sia attraversata da una massa di soluto

$$\int_{t_1}^{t_2} c(x_i, t) v_0 \Sigma dt$$

Perciò ripetendo il ragionamento che ci ha portato alla (2.5) otterremo:

$$c_t = Dc_{xx} - v_0 c_x \quad (2.10)$$

è chiaro che, se v invece di essere costante è assegnata in funzione di x e di t , si avrà al posto della (2.10) l'equazione:

$$c_t = Dc_{xx} - (vc)_x \quad (2.11)$$

(è evidente che qui il flusso specifico q è dato da $-Dc_x + vc$)

Il termine Dc_{xx} è detto *termine diffusivo* mentre quello $(vc)_x$ è chiamato *termine convettivo o di trasporto*.

Nel caso pluridimensionale si ottiene invece

$$c_t = \text{div}(D \text{ grad } c - c\underline{v}) \quad (2.12)$$

(5) Rilascio o assorbimento di soluto.

Supponiamo ora che il fenomeno diffusivo/convettivo sia accompagnato da un fenomeno in base al quale c'è una certa massa di soluto che può essere aggiunta o sottratta al mezzo. Si pensi ad esempio ad una reazione chimica oppure ad un fenomeno fisico come l'evaporazione (se ad esempio il mezzo in cui si studia il fenomeno è una lamina sottile bidimensionale).

Da un punto di vista matematico il fenomeno si schematizza semplicemente supponendo che esista una funzione $f(c, \underline{x}, t)$ tale che la massa di soluto aggiunto dall'esterno al generico V nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) è

$$m_V = \int_{t_1}^{t_2} \int_V f(c, \underline{x}, t) d\underline{x} dt \quad (2.13)$$

Ripercorrendo i ragionamenti già fatti avremo, per il caso unidimensionale

$$c_t = Dc_{xx} - (vc)_x + f(c, x, t) \quad (2.14)$$

(dove il caso puramente diffusivo si ha ponendo $v=0$)

Per il caso pluridimensionale avremo:

$$c_t = \text{div}(D \text{ grad } c - c\underline{v}) + f(c, \underline{x}, t) \quad (2.15)$$

Infatti nei due casi al bilancio di massa già fatto nei paragrafi precedenti basterà aggiungere il termine (2.13) (che nel caso unidimensionale è semplicemente $\sum_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(c, x, t) dx dt$).